Mathematik

Wiederholungen und Übungen zum leichteren Einstieg in das Fach Mathematik in den Beruflichen Gymnasien

Zur Verfügung gestellt von Marion Patyna, Berufsbildende Schulen Buchholz i. d. N.,
Fachberatende Lehrkraft für Mathematik an der Landesschulbehörde

I. Termumformungen

1. <u>Stellen Sie die Rechnung auf und ermitteln Sie das Ergebnis:</u>

Addition:	Summand + Summand = Summe
Subtraktion:	Minuend - Subtrahend = Differenz
Multiplikation:	Faktor **·** Faktor = Produkt
Division:	Dividend **:** Divisor = Quotient

a. Dividieren Sie 1600 durch 64.
b. Subtrahieren Sie von der Zahl 4562 die Zahl 3687.
c. Multiplizieren Sie 530 mit 17.
d. Vermindern Sie den Quotienten von 561 und 33 um die Zahl 6.
e. Berechnen Sie das Doppelte der Differenz von 1063 und 172.
f. Addieren Sie zum Dreifachen des Produktes von 76 und 4 den Quotienten der Zahlen 876 und 146

Lösungen

a. $1600 : 64 = 25$
b. $4562 - 3687 = 875$
c. $530 \cdot 17 = 9010$
d. $\frac{561}{33} - 6 = 17 - 6 = 11$
e. $(1063 - 172) \cdot 2 = 891 \cdot 2 = 1782$
f. $3 \cdot (76 \cdot 4) + \frac{876}{146} = 3 \cdot 304 + 6 = 912 + 6 = 918$

2. <u>Zahlenmengen</u>

ℕ: natürliche Zahlen
ℤ: ganze Zahlen
ℚ : rationale Zahlen
ℝ : reelle Zahlen

Ordnen Sie die folgenden Zahlen der jeweils kleinstmöglichen Zahlenmenge zu:

a. -4 b. $0{,}5$ c. $\frac{8}{4}$ d. $\frac{3}{5}$ e. $\sqrt{9}$ f. $\sqrt{3}$

Lösungen

a. ℤ b. ℚ c. ℕ d. ℚ e. ℤ f. ℝ

3. Termumformungen

Bei Termumformungen gelten die folgenden Gesetze:

Kommutativgesetz	a + b = b + a	a · b = b · a oder a b = b a
Assoziativgesetz	a + (b + c) = (a + b) + c	a · (b · c) = (a · b) · c = abc
Distributivgesetz	a · (b + c) = ab + ac	(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd

Formen Sie die folgenden Terme um und fassen Sie diese jeweils zusammen:

a. $3(4a-5)-7(2a-3)+4(-3a+5)=$
b. $6(x-3)-2(-7x+4)+9(2x+3)=$
c. $(a+5)(a-3)=$
d. $(9a-4b)(5c+3)=$
e. $(4a-5b)(6a+7b)+(3a-2b)(8a+4b)=$

Lösungen

a. $12a-15-14a+21-12a+20=\ -14a+26$
b. $6x-18+14x-8+18x+27=38x+1$
c. $a\cdot a-3a+5a+5\cdot(-3)=a^2+2a-15$
d. $9a\cdot 5c+9a\cdot 3-4b\cdot 5c-4b\cdot 3=45ac+27a-20bc-12b$
e. $24aa+28ab-30ab-35bb+24aa+12ab-16ab-8bb=48a^2-6ab-43b^2$

II. Lineare Gleichungen und ihre Lösungsmengen

Merke:

Man löst eine Gleichung, indem man zunächst die Klammern (falls vorhanden) auflöst und Terme zusammenfasst.

Anschließend wird auf beiden Seiten der Gleichung

- dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert,

- mit derselben Zahl (außer Null) multipliziert oder durch dieselbe Zahl (außer Null) dividiert,

bis die Variable auf einer Seite der Gleichung allein steht

Gleichungen lassen sich oftmals nach einem Ablaufplan lösen:

1. Lösen Sie die Klammern auf. Beachten Sie dabei die Vorzeichen

$\Downarrow$

2. Fassen Sie auf beiden Seiten, wenn möglich, zusammen.

$\Downarrow$

3. Ordnen Sie: Glieder mit Variable, Glieder ohne Variable.

$\Downarrow$

4. Formen Sie die Gleichung solange um, bis die Variable auf einer Seite alleine steht.

Beispiel:

$9x + 5 \cdot (2 - x) = 3x - (x - 15)$	Klammern auflösen
$9x + 10 - 5x = 3x - x + 15$	zusammenfassen
$4x + 10 = 2x + 15$	$-\ 2x$
$2x + 10 = 15$	$-\ 10$
$2x = 5$	$:2$
$x = 2{,}5$	

Aufgabe 1

Lösen Sie die Gleichungen:

a. $5 \cdot (x+8) + 2x + 3 \cdot (x-12) = 6x + 14 - x$

b. $6 \cdot (x-4) + 4 \cdot (6x-3) = 2 \cdot (3x-2) + 16$

c. $5 + 4(3x+1) = 11x + 44 - 6x$

d. $12(x+4) + 2(3 - x + 17x) = 142$

Lösungen

a. $x = 2$
b. $x = 2$
c. $x = 5$
d. $x = 2$

Aufgabe 2

Seltsame Gleichungen. Gibt es Lösungen?

a. $4x + 3 = 4x - 2$

b. $2(3x+6) = 3(2x+4)$

c. $3x = 5x$

d. $4(3y+7) = 2(14+6y)$

Lösungen

a. Keine Lösung
b. Unendlich viele Lösungen, beide Seiten sind identisch
c. Keine Lösung
d. Unendlich viele Lösungen, beide Seiten sind identisch

Aufgabe 3

Suchen Sie die Fehler, die gemacht wurden. Rechnen Sie richtig weiter.

a. $29 - (17 - 2x) = 8x + (12 - 3x)$

$29 - 17 - 2x = 8x + 12 - 3x$

b. $2(3x+4) - 2x - 16 = 0$

$6x + 4 - 2x - 16 = 0$

Lösungen

a.	$29 - 17 + 2x = 8x + 12 - 3x$	$\Rightarrow$	$x = 0$
b.	$6x + 8 - 2x - 16 = 0$	$\Rightarrow$	$x = 2$

<u>Aufgabe 4</u>

Für einen Arbeitsverbesserungsvorschlag wird eine Prämie von 6900 € auf vier Arbeiter verteilt.

Die Prämie soll so verteilt werden, dass der zweite Arbeiter 200 € mehr erhält als der erste.

Der dritte Arbeiter erhält 200 € mehr als der zweite.

Der vierte Arbeiter erhält 200 € mehr als der dritte.

Wie viel € erhält jeder Arbeiter?

Lösung

$$6900 = x + (x + 200) + (x + 400) + (x + 600) \quad \Rightarrow \quad x = 1425$$

Der erste Arbeiter erhält 1425 €, der zweite 1625 €, der dritte 1825 € und der vierte Arbeiter erhält 2025 €.

III. Quadratische Gleichungen

A. Rein-quadratische Gleichungen der Form: $ax^2 + c = 0$

Gleichungen, in denen die Variable x nur als x² vorkommt, wie z.B. $x^2 = 9$ oder $5x^2 - 20 = 10$, heißen *rein-quadratische* Gleichungen.

Beispiel: $\mathbf{3x^2 - 12 = 0}$

1. Umformen der Gleichung, um x² zu isolieren und die Quadratwurzel ziehen zu können:

$3x^2 - 12 = 0 \quad | +12$

$3x^2 = 12 \quad | :3$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = 2 \quad \vee \quad x_2 = -2$

2. Lösbarkeit:

Eine *rein-quadratische* Gleichung kann, wie jede quadratische Gleichung, drei Lösungsvarianten haben.

- **zwei** Lösungen für positive Zahlen $(z.B.: x^2 = 4)$
- **eine** Lösung für 0 $(x^2 = 0)$
- **keine** Lösung für negative Zahlen $(z.B.: x^2 = -4)$

B. Gemischt-quadratische Gleichungen der Form:

a) $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ (Normalform)

Neben dem Ausdruck x² enthält die *gemischt-quadratische* Gleichung auch noch einen weiteren Rechenausdruck mit der Variablen x, nämlich px, auch Linearglied genannt, sowie ein Absolutglied (ohne x), hier q.

Die *gemischt-quadratische* Gleichung hat die Lösungsformel $X_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Den Rechenausdruck $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q$ unter der Wurzel nennt man Diskriminante (D) der Gleichung.

Beispiel zu a): $\boldsymbol{x^2 - 4x - 5 = 0}$

1. Bestimmen von **p** und **q**:

$p = -4 \qquad q = -5$

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{9}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm 3$$

$x_1 = 2 + 3 \quad \vee \quad x_2 = 2 - 3.$

$x_1 = 5 \quad \vee \quad x_2 = -1$

2. Lösbarkeit:

Eine *gemischt-quadratische* Gleichung kann ebenfalls, wie jede quadratische Gleichung, drei Lösungsvarianten haben.

- **zwei** Lösungen, wenn für die Diskriminante gilt: D > 0 (positiv)
- **eine** Lösung, wenn für die Diskriminante gilt: D = 0
- **keine** Lösung, wenn für die Diskriminante gilt: D < 0 (negativ)

b) $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ **(allgemeine Form)**

Beispiel zu b): $\boldsymbol{3x^2 + 30x + 75 = 0}$

Durch Umformungen muss diese Gleichung zunächst normiert werden!

$$3x^2 + 30x + 75 = 0$$

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

Weiter wie in Beispiel a) $\Rightarrow$ Bestimmen von **p** und **q**, Lösungsformel anwenden.

Aufgaben zu A		**Aufgaben zu B**	
(1)	$0 = x^2 - 16$	(1)	$0 = x^2 - 2x - 3$
(2)	$0 = 6x^2 + 54$	(2)	$0 = 3x^2 + 30x + 75$
(3)	$0 = -5x^2 + 125$	(3)	$0 = x^2 + 4x + 5$

Lösungen zu A

(1)	$x_1 = 4$	∨	$x_2 = -4$
(2)	keine Lösung		
(3)	$x_1 = 5$	∨	$x_2 = -5$

Lösungen zu B

(1)	$x_1 = -1$	∨	$x_2 = 3$
(2)	$x_{1,2} = -5$		
(3)	keine Lösung, D < 0		

IV. Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sind zwei lineare Gleichungen mit den Variablen *x* und *y*.
Gesucht ist der x-Wert und der y-Wert, für die man beim Einsetzen in beide Gleichungen eine wahre Aussage erhält.

Zur Lösung des Gleichungssystems können drei Verfahren angewendet werden:

Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren und **Additionsverfahren**.

Alle drei führen zur gleichen Lösung.

Die Wahl des günstigsten Verfahrens ist davon abhängig, in welcher Form die Gleichungen gegeben sind.

Beispiel:

1. Lösung mit dem Gleichungsetzungsverfahren

Gegeben sind die Gleichungen $y = 2x + 1$

$y = 4 - x$

Das Gleichsetzen der y-Werte ergibt eine Gleichung mit nur einer Variablen x.

Die Variable y wurde eliminiert: $2x + 1 = 4 - x$

Die Auflösung nach x ergibt $x = 1$

Einsetzen in eine der beiden Gleichungen ergibt $y = 3$

2. Lösung mit dem Einsetzungsverfahren

… bietet sich an, wenn die Gleichung in folgender Form gegben sind:

$y = 2x + 1$ und $y + x = 4$

Die erste, nach y aufgelöste Gleichung, wird in die zweite Gleichung eingesetzt, indem der y-Wert der zweiten Gleichung durch die rechte Seite der ersten Gleichung ersetzt wird.

Man erhält wiederum eine Gleichung mit nur einer Variablen x, y wurde so eliminiert:

$$2x + 1 + x = 4$$

Die Auflösung nach x ergibt $x = 1$

Einsetzen in eine der beiden Gleichungen ergibt $y = 3$

3. Lösung mit dem Additionverfahren

… bietet sich an, wenn die Gleichung in folgender Form gegben sind: $2x - y = -1$
$x + y = 4$

Bei der Addition der beiden Gleichungen fällt eine der beiden Variablen weg, hier y:

$$2x - y \; + \; x + y = -1 + 4$$

Es ergibt sich eine Gleichung mit nur eihner Variablen x. Die Variable y wurde eliminiert.

$$3x = 3$$

Die Auflösung nach x ergibt $x = 1$

Einsetzen in eine der beiden Gleichungen ergibt $y = 3$

Die **Lösung** des linearen Gleichungssystems lautet in allen drei Fällen $\boldsymbol{x = 1}$ und $\boldsymbol{y = 3}$,

als **Zahlenpaar** dargestellt **(1;3)**

und als **Lösungsmenge** des linearen Gleichungssystems **L = {(1;3)}**.

Aufgaben

1. Lösen Sie mit dem Einsetzungsverfahren:

$$y = \; -x + 3$$
$$y + 3x = 3$$

2. Lösen Sie mit dem Gleichsetzungsverfahren!

$$-3x + 1 = y$$
$$4x - 6 = y$$

3. Lösen Sie mit dem Additionsverfahren!

$$2x + 3y = \; -1$$
$$3x + 2y = 4$$

4. Lösen Sie mit dem Einsetzungsverfahren!

$$y = \; -x + 3$$
$$+x = 3$$

5. Lösen Sie mit dem Gleichsetzungsverfahren!

$$-3x + 1 = y$$
$$-3x - 6 = y$$

Lösungen

1.	$x = 0$	und	$y = 3$
2.	$x = 1$	und	$y = -2$
3.	$x = 2{,}8$	und	$y = -2{,}2$
4.	$x = 3$	und	$y = 0$
5.	Keine Lösung		

V. Lineare Funktionen

Eine Funktion ist die eindeutige Zuordnung eines y-Wertes (abhängige Variable) zu einem x-Wert (unabhängige Variable).

Man unterscheidet im Wesentlichen drei mögliche Darstellungsformen einer Funktion:

Wertetabelle, Funktionsgraph sowie Funktionsgleichung.

Eine lineare Funktion beinhaltet einen x-Wert in 1. Potenz und wird durch eine Gerade im Koordinatensystem dargestellt. (linea recta (lat.): Gerade)

Die Wertetabelle

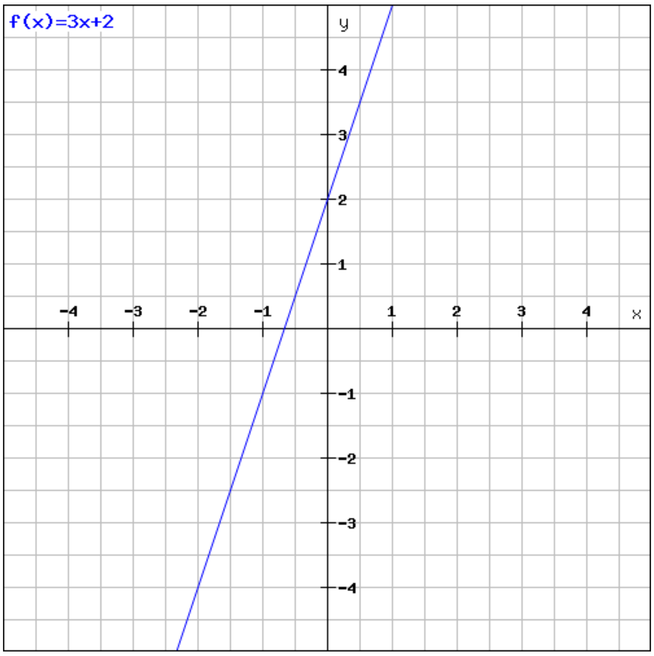
Man stellt eine Wertetabelle auf, indem man in die Funktionsgleichung die x-Werte aus der Definitionsmenge (D) einsetzt und die jeweiligen y-Werte (f(x)-Werte) ausrechnet.

Beispiel: $f(x) = 3x + 2$ oder $y = 3x + 2$

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-4	-1	2	5	8	11

Der Funktionsgraph

Die Zahlenpaare (Punkte) aus der Wertetabelle werden in ein Koordinatensystem übertragen. Wenn man die Punkte verbindet, erhält man den Graphen der Funktion.



Die Funktionsgleichung

Durch die Funktionsgleichung wird jedem x-Wert der Definitionsmenge (D) ein f(x)-Wert (y-Wert) zugeordnet. Die Menge aller y-Werte nennt man Wertemenge (W).

Aufstellen der Funktionsgleichung

Ursprungsgerade

Eine Ursprungsgerade hat die allgemeine Form $f(x) = mx$ oder $y = mx$

Steigung

Aus der allgemeinen Form der Ursprungsgeraden erkennt man, dass die Steigung durch m angegeben wird. Sie gibt an, um wie viele Einheiten sich der Funktionswert ändert, wenn sich x um eine Einheit ändert.

Beliebige Gerade

Eine beliebige Gerade hat die allgemeine Form $f(x) = mx + b$.

Schnittstellen

Der Summand b gibt die Schnittstelle des Funktionsgraphen mit der y-Achse an.

Rechnerisch ergibt sich die Schnittstelle durch x = 0

$$f(x = 0) = m \cdot 0 + b = b$$

Die Schnittstelle mit der x-Achse wird auch Nullstelle genannt und ergibt sich rechnerisch durch $f(x) = 0$:

$$0 = mx + b$$

$$\frac{-b}{m} = x_0$$

Schnittpunkt

Der Schnittpunkt zweier Geraden wird berechnet, indem man die Funktionsterme gleichsetzt und nach x auflöst. Man erhält so den x-Wert des Schnittpunktes.

Um den y-Wert des Schnittpunktes zu ermitteln, wird der berechnete x-Wert in einen der beiden Funktionsterme eingesetzt und nach y bzw. f(x) aufgelöst (siehe Lineare Gleichungssysteme).

VI. Dreisatz

Es gibt zwei Arten von Dreisatz,

den **geraden (proportionalen**) und den **ungeraden (antiproportionalen)** Dreisatz.

Zunächst ist es unerheblich, um welche Art des Dreisatzes es sich handelt. Man startet immer gleich, d.h. man sucht aus dem Text die zusammengehörigen Größen heraus.

Es werden dafür immer gleiche Größen untereinander geschrieben.

Beispiel:

Ein Unternehmen beschäftigt acht Mitarbeiter, die eine Garage bauen sollen. Sie werden für dieses Bauprojekt sechs Tage benötigen. Nun sind jedoch fünf Arbeitskräfte erkrankt.

Wie lange benötigen die verbleibenden Mitarbeiter für dieses Bauprojekt?

8 Arbeitskräfte	-	6 Tage
3 Arbeitskräfte	-	x Tage

Nun muss man feststellen, um welche Art Dreisatzes es sich handelt.

Dafür stehen einem Merksätze zur Verfügung:

Gerader Dreisatz:	**je mehr ……..., desto mehr …**
	Je weniger …, desto weniger …

Ungerader Dreisatz:	**je weniger …., desto mehr …**
	je mehr …….., desto weniger

zurück zum Beispiel:

Je **weniger** Arbeitskräfte arbeiten, desto **mehr** Zeit benötigen sie. ⇒ <u>ungerades Verhältnis.</u>

Rechenweg:

$$x = \frac{8\,Arbeitskräfte \cdot 6\,Tage}{3\,Arbeitskräfte} = 16\,Tage$$

Weiteres Beispiel:

Familie Müller möchte ihre Wohnung streichen. Sie hat bisher 30 Liter Farbe gekauft und konnte damit 54 m² Wandfläche streichen. Wie viel Liter Farbe benötigt sie, wenn sie insgesamt 351 m² streichen würden?

Je mehr Wandfläche gestrichen werden soll, desto mehr Farbe wird benötigt. ⇒ <u>gerades Verhältnis.</u>

Rechenweg:

$$x = \frac{351\,m^2 \cdot 30\,Liter}{54\,m^2} = 195\,Liter\;Farbe$$

<u>Dreisatzaufgaben</u>

1. Drei Maurer benötigen zum Errichten einer Mauer zwei Tage.
   Wie lange würden zwei Maurer brauchen, um dieselbe Mauer zu errichten?

2. Ein Heizvorrat besteht aus acht Zentnern Kohle und reicht 20 Wochen.
   Wie lange würde der Heizvorrat reichen, wenn er nur aus fünf Zentnern Kohle bestünde? (1 Zentner = 50 kg)

3. In einer Fabrik arbeiten 120 Arbeiter bei achtstündiger Arbeitszeit.
   Wie viele Arbeiter müssten neu eingestellt werden, wenn bei gleichbleibender Produktion die Arbeitszeit auf 7,5 Stunden verkürzt werden soll?

4. Jemand hat in einem Geschäft acht Kerzen zu 2,80 €/Stück gekauft. Nun möchte er die Kerzen umtauschen gegen solche, die 3,20 €/Stück kosten.
   Wie viele Kerzen erhält er, ohne zuzahlen zu müssen.

5. Ein Zweitakt-Motor benötigt für 20 Liter Benzin 0,8 Liter Öl.
   Wie viel Liter Öl werden für 95 Liter Benzin benötigt?

6. Im Tank eines Autos befinden sich noch 57 Liter Benzin.
   Wie weit kann das Auto noch fahren, wenn es einen Verbrauch von 12 Litern auf 100 km hat?

7. Zum Bau einer Mauer hätten sieben Maurer acht Tage gebraucht. Nun sind drei Maurer erkrankt.
   Wie lange dauert der Bau der Mauer?

8. Ein Zimmer hat eine Größe von 3,75 m x 5,10 m. Es soll mit Teppichfliesen ausgelegt werden, die eine Größe von 30 cm x 30 cm haben.
   Wie viele dieser Teppichfliesenwerden benötigt?

9. Für die Anfertigung eines Ballen Stoffs, der 140 cm breit und 200 m lang ist, braucht eine Weberei 56 kg Garn.
   Wie viel kg Garn werden für einen Ballen des gleichen Gewebes benötigt, der 95 cm breit und 300 m lang ist?

10. Die Batterie, mit der acht Lampen zur Sicherung einer Baustelle versorgt werden, reicht für elf Nächte.

Wie lange reicht sie, wenn drei Lampen zusätzlich angeschlossen werden?

Lösungen Dreisatzaufgaben

1. Zwei Maurer benötigen drei Tage um dieselbe Mauer zu errichten. **(ungerade)**
2. Mit 5 Zentnern Kohler könnte man 12,5 Wochen heizen. **(gerade)**
3. Damit bei gleichbleibender Produktion die Arbeitszeit auf 7,5 Stunden verkürzt werden kann, müssten acht Arbeiter zusätzlich eingestellt werden. **(ungerade)**
4. Der Kunde erhält sieben Kerzen. **(ungerade)**
5. Für 95 Liter Benzin benötigt der Motor 3,8 Liter Öl. **(gerade)**
6. Das Auto könnte noch 475 km fahren. **(gerade)**
7. Der Bau der Mauer dauert nun 14 Tage. **(ungerade)**
8. Es werden 212,5, also 213 Teppichfliesen benötigt. **(gerade)**
9. Für einen Ballen der Größe 95 cm x 300 m benötigt man 57 kg Garn. **(gerade)**
10. Die Batterie würde acht Nächte reichen. **(ungerade)**

VII. Prozentrechnung

Grundlage ist die Prozentformel:

$w = \frac{g \cdot p}{100}$ mit g = Grundwert, p = Prozentsatz [%] und w = Prozentwert

In den überwiegend wirtschaftlichen Anwendungsaufgaben wird diese Grundformel für die Berechnung der Lösungen nach allen Variablen umgestellt.

Prozentwerte werden auch graphisch in Säulendiagrammen/ Kreisdiagrammen dargestellt.

Beispielaufgaben:

1. Gib den Anteil in [%] an: 0,42 m von 2,00 m.

   Lösung: $p = \frac{w \cdot 100}{g} = \frac{0{,}42\,m \cdot 100}{2{,}00\,m} = 21\%$

2. Berechne den Grundwert: 23 % von g sind 125 m.

   Lösung: $g = \frac{w \cdot 100}{p} = \frac{125\,m \cdot 100}{23} = 543{,}48\,m$ (sinnvoll gerundet)

3. Berechne den Prozentwert: 0,35 % von 7140 kg.

   Lösung: $w = \frac{g \cdot p}{100} = \frac{7140\,kg \cdot 0{,}35}{100} = 24.990\,kg$

4. Durch einen Anbau konnte die Wohnfläche eines Hauses von 148 m² auf 176 m² vergrößert werden. Um wie viel % wurde die Wohnfläche vergrößert?

   Lösung: $g = 148\,m^2, w = 176\,m^2 - 148\,m^2 = 28\,m^2, p = \frac{28 \cdot 100}{148} = 18{,}9\,\%$

VIII. Bruchrechnung und Bruchgleichung

1. Rechnen mit Brüchen

Zu Beschreibung von Anteilen werden Brüche, wie z.B. $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$ oder $\frac{1}{2}$ verwendet. Die obere Zahl des Bruches wird als Zähler, die untere als Nenner bezeichnet. Brüche, bei denen der Zähler gleich dem Nenner oder größer als der Nenner ist, wie z.B. $\frac{5}{5}$, $\frac{9}{7}$ oder $\frac{3}{2}$, heißen unechte Brüche.

Beschränkt sich die Bruchrechnung auf ganzzahlige Zähler und Nenner, stellt in diesem Fall der Bruch eine rationale Zahl dar und kann auch durch eine endliche oder periodische Dezimalzahl dargestellt werden.

Grundsätzlich gilt: Durch Null darf man nicht dividieren.

Der Nenner eines Bruches muss ≠ 0 sein, denn wäre z.B. der Wert eines Bruches $\frac{a}{0} = z$, so müsste die Probe $z \cdot 0 = a$ ergeben. Für $a \neq 0$ ist dies falsch.

Für $a = 0$ lautet die Aufgabe $\frac{0}{0} = z$; die Probe liefert $z \cdot 0 = 0$, was für jede beliebige Zahl z gilt. Daher hat $\frac{0}{0}$ kein eindeutiges Ergebnis und ist nicht sinnvoll.

2. Erweitern eines Bruches mit einer Zahl k ≠ 0

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Regel: Der Zähler und Nenner des Bruches werden mit derselben Zahl k ≠ 0 multipliziert.

Beispiel: Wir erweitern den Bruch $\frac{2}{5}$ mit der Zahl 3:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

3. Kürzen eines Bruches durch eine Zahl k ≠ 0

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k} = \frac{c}{d} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{b} = \frac{c \cdot k}{d \cdot k} = \frac{c}{d}$$

Regel: Der Zähler und Nenner des Bruches werden durch dieselbe Zahl k ≠ 0 dividiert.

Beispiel:

$\frac{15}{25} = \frac{15 \div 5}{25 \div 5} = \frac{3}{5}$ bzw. $\frac{15}{25} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

4. Addition und Subtraktion zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

Regel: Die Brüche werden gleichnamig gemacht, d.h. auf einen gemeinsamen Nenner, den sog. Hauptnenner, gebracht. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner.

Beispiel:

$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{15+8}{20} = \frac{23}{20}$ (Hauptnenner: 4·5 = 20)

5. Multiplikation zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Regel: Zwei Brüche werden multipliziert, indem man ihre Zähler und Nenner miteinander multipliziert.

Beispiel:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

6. Division zweier Brüche (Doppelbruch)

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Regel: Zwei Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert des Divisors (Kehrwert des Nennerbruches) multipliziert.

Beispiel:

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$$